Планиметрия без формул.

Два угла называются *смежными,* если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов являются *дополнительными полупрямыми.*

1. Сумма смежных углов равна 180°.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

2. Вертикальные углы равны.

Угол, равный 90°, называется *прямым углом.* Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются *перпендикулярными.*

3. Через каждую точку прямой можно провести и притом только одну, перпендикулярную прямую.

Угол, меньший 90°, называется *острым.* Угол больший 90°, называется *тупым.*

4. Признаки равенства треугольников.

- по двум сторонам и углу между ними;
- по стороне и двум прилегающим к ней углам;
- по трем сторонам.

Треугольник называют *равнобедренным*, если у него две стороны равны.

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называют отрезок прямой, заключенной между вершиной и точкой ее пересечения с противоположной стороной, которая делит угол пополам.

Высота треугольника – это отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону, или на ее продолжение.

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. В прямоугольном треугольнике сторона, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой.* Остальные две стороны, называются *катетами.*

5. Свойства сторон и углов **прямоугольного треугольника**:

- углы, противолежащие катетам – острые;
- гипотенуза больше любого из катетов;
- сумма катетов больше гипотенузы.

6. Признаки равенства прямоугольных треугольников:

- по катету и острому углу;
- по двум катетам;
- по гипотенузе и катету;
- по гипотенузе и острому углу.

7. Свойства **равнобедренного треугольника**:

- в равнобедренном треугольнике углы при основании равны;
- если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный;
- в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой;
- если в треугольнике медиана и биссектриса (или высота и биссектриса, или медиана и высота), проведенная из какой-либо вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный.

8. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит большая сторона.

9. (Неравенство треугольника). У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.

Внешним углом треугольника ABC при вершине A называется угол, смежный углу треугольника при вершине A.

10. Сумма внутренних углов треугольника:
- сумма любых двух углов треугольника меньше 180°;
- в каждом треугольнике два угла острые;
- внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним;
- сумма углов треугольника равна 180°;
- внешний угол треугольника равен сумме двух других углов, не смежных с ним.
- сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон треугольника называется *средней линией треугольника*.

11. Средняя линия треугольника обладает свойством – она параллельна основанию треугольника и равна ее половине.

12. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющей ее концы.

13. Свойства серединного перпендикуляра отрезка:
- точка лежащая на серединном перпендикуляре одинаково удалена от концов отрезка;
- любая точка, одинаково удаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре.

14. Свойства биссектрисы угла:
- любая точка, лежащая на биссектрисе угла, одинаково удалена от сторон угла;
- любая точка, одинаково удаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе угла.

15. Существование **окружности**, описанной около треугольника:
- все три серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром описанной окружности. Описанная около треугольника окружность всегда существует и она единственна;
- центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина гипотенузы.

16. Существование вписанной в треугольник окружности:
- все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром вписанной окружности. Вписанная в треугольник окружность всегда существует и она единственна.

17. **Признаки параллельности прямых**.

Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых:
- две прямые, параллельные третьей - параллельны;
- если при пересечении двух прямых третьей, внутренние (внешние) накрест лежащие углы равны, или внутренние (внешние) односторонние углы в сумме равны 180°, то эти прямые параллельны;
- если параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние и внешние накрест лежащие углы равны, и внутренние и внешние односторонние углы в сумме равны 180°;
- две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой – параллельны;
- прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и второй.

Окружность – множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр – хорда, проходящая через центр.

Касательная – прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.

Вписанный угол – угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность.

18. Теоремы, относящиеся к **окружности**:
- радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;
- диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей;
- квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на ее внешнюю часть;
- центральный угол измеряется градусной мерой дуги, на которую он опирается;
- вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, или дополняет его половину до 180°;
- касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны;
- произведение секущей на ее внешнюю часть – величина постоянная;

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

19. Признаки **параллелограмма**. Свойства параллелограмма:
- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон;
- если в выпуклом четырехугольнике противоположные стороны равны, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- если в выпуклом четырехугольнике противоположные углы равны, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- если в выпуклом четырехугольнике диагонали делятся точкой пересечения пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм;
- середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Параллелограмм, все стороны которого равны, называется *ромбом.*

20. Дополнительные свойства и признаки **ромба**:
- диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
- диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов;
- если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, или являются биссектрисами соответствующих углов, то этот параллелограмм – ромб.

Параллелограмм, все углы которого прямые, называется *прямоугольником.*

21. Дополнительные свойства и признаки **прямоугольника**:
- диагонали прямоугольника равны;
- если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм – прямоугольник;
- середины сторон прямоугольника – вершины ромба;
- середины сторон ромба – вершины прямоугольника.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом.*

22. Дополнительные свойства и признаки **квадрата**:
- диагонали квадрата равны и перпендикулярны;
- если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то такой четырехугольник – квадрат.

Четырехугольник, две стороны которого параллельны, называется ***трапецией.***

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией трапеции.*

23. Свойства трапеции:
- в равнобокой трапеции углы при основании равны;
- отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции.

24. Средняя линия трапеции обладает свойством – она параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

25. Признаки ***подобия* треугольников**:
- по двум углам;
- по двум пропорциональным сторонам и углу между ними;
- по трем пропорциональным сторонам.

26. Признаки подобия прямоугольных треугольников:
- по острому углу;
- по пропорциональным катетам;
- по пропорциональным катету и гипотенузе.

27. Соотношения в многоугольниках:
- все правильные многоугольники подобны друг другу;
- сумма углов любого выпуклого многоугольника равна 180(*n*-2);
- сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному у каждой вершины, равна 360.
- периметры подобных многоугольников относятся, как их *сходственные* стороны, и это отношение равно коэффициенту подобия;
- площади подобных многоугольников относятся, как квадраты их сходственных сторон, и это отношение равно квадрату коэффициента подобия;

Важнейшие теоремы планиметрии:

28. Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной стороне равные отрезки, то эти прямые отсекают на другой стороне также равные отрезки.

29. Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

30. Теорема косинусов. В любом треугольнике, квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без их удвоенного произведения на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$.

31. Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R$, где R - радиус окружности, описанной около этого треугольника.

32. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

33. Три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

34. Площадь параллелограмма равна произведению одной из его сторон на высоту, опущенную на эту сторону (или произведению сторон на синус угла между ними).

35. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, опущенную на эту сторону (или половине произведения сторон на синус угла между ними).

36. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

37. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

38. Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

39. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

40. В прямоугольном треугольнике, медиана, проведенная к гипотенузе, делит треугольник на два равновеликих треугольника.

41. Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты: $S = h^2$.

42. Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180.

43. Четырехугольник можно описать вокруг окружности, если суммы длин противоположных сторон равны.